重調和分析利用による海況予報の試みについて

小田切　忠　夫

海況は，魚の環境条件を形成している点で水産研究の重要な対象をなしている。従来この予報については，周期分析，類似法，相関法，持続性等，種々の方法があるが，これらの方法は計算そのものは単純であるが，計算量が莫大になるので，たとえば，周期分析では２４周期位までが計算の限度である。そして，これらはこれらなりに予報の指標となるが，実際にはこの周期より長い周期による影響があり，この長い周期を把握することが予報のより正確さを増すと考えられる。

このような理由から，計算をより容易にし，かつ長い周期の計算をする方法として重調和分析が利用できるのではないかと思われたので，この試みの結果につき報告する。

なお，計算の実施については当試験山本佐代子，佐々木真理，高見さつき女史に協力を得たことおよび原稿の校閲については，井村幸二氏にお願いしたことを付記してお礼申し上げる。

材　　料

ここで扱う資料は，現在鳥取県水産試験場および兵庫県水産試験場で実施している漁海況予報事業の地先毎月定線調査の定点の水深５０ｍ層の中，過去の観測資料が１０年間になるものを対象とした。

各点各月の水温値は各点毎にグラフに時系列を画き，各月間および欠測月は連続しているものとして作図し，各月の一日の水温値を上記の作図法により，その月の水温値とした。

方　　法

ある任意の観測点の任意の水深層の水温の時間的変化$\phi(x)$は，次の条件を満足させるとする。

ｉ）$|\phi(x)|$ はある一定の正数より小さい。

ii）不連続点の数は有限である。

iii）極大，極小となる点の数は有限である。

以上より，$\phi(x)$は，Ｆｏｕｒｉｅｒ 級数の近似としてあらわされる。$0 \leqq x \leqq 2\pi$において連続な函数$f(x)$は，つぎのような有限項Ｆｏｕｒｉｅｒ 級数で近似的にあらわされる。

$$f(x) \fallingdotseq \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots\cdots + a_n\cos nx$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots\cdots + b_n\cos nx$$

ただし，$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\chi)\cos n\chi d\chi$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\chi)\sin n\chi d\chi$

周期 2π の任意の水深層の水温の時間的変化を $y = \phi(\chi)$ とする。区間 $0 \leqq \chi \leqq 2\pi$ を $2n$ 等分し，その分点

$$\chi_0 = 0 \quad \chi_1 = \frac{\pi}{n_1} \quad \chi_2 = 2\frac{\pi}{n_1} \quad \chi_3 = 3\frac{\pi}{n_1} \quad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \quad \chi_{r-1} = (r-1)\frac{\pi}{n} \quad (r = 2n)$$

における函数の値 y_0, y_1, y_2, y_3, ……

$y(r-1)$ が与えられているとする。

$\phi(\chi)$ の近似函数として Fourier 級数

$$f(\chi) = a + a_1\cos\chi + a_2\cos 2\chi + \cdots\cdots + a_n\cos n\chi$$
$$+ b_1\sin\chi + b_2\sin 2\chi + \cdots\cdots + b_n\sin n\chi$$

をとり χ_0, χ_1, χ_2, ……, $\chi(r-1)$ において

$$f(\chi_0) = y_0 \quad f(\chi_1) = y_1 \quad f(\chi_2) = y_2; \quad \cdots\cdots$$

$$f(\chi_{r-1}) = y_{r-1}$$

となるように a_0, a_1, a_2, …… a_{n_1} b_1 b_2

…… b_n を定めれば

$$a_0 = \frac{1}{r}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_{r-1})$$
$$a_n = \frac{1}{r}(y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + \cdots\cdots - y_{r-1})$$
$$b_n = 0$$
$$a_v = \frac{2}{r}(y_0\cos v\chi_0 + y_1\cos v\chi_1 + \cdots\cdots + y_{r-1}\cos v\chi_{r-1})$$
$$b_v = \frac{2}{r}(y_0\sin v\chi_0 + y_1\sin v\chi_1 + \cdots\cdots + y_{r-1}\sin v\chi_{r-1})$$
$$(v = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \frac{r}{2} - 1)$$

このように，ある任意の観測点の任意の水深層の水温の時系列 y_i が与えられた場合，その r 項をとり出して Fourier 解析を行なうことは，r の任意の数について，

$$\left.\begin{matrix} a_v \\ a_v \end{matrix}\right\} = \frac{2}{r}\sum_{\rho=0}^{r-1} y_\rho \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} v\rho\frac{2\pi}{r}$$
$$(v = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \frac{r}{2} - 1)$$

$$a_0 = \frac{1}{r}\sum_{\rho=0}^{r-1} y_\rho$$

$$a_n = \frac{1}{r}\sum_{\rho=0}^{r-1} (-1)^\rho y_\rho$$

の計算をなせばよいのであるが，rを大きくなるとその手数はすこぶる繁雑である。そこでその計算方法を簡単にするためK Stumpffは，p項解析を2回あるいは3回繰返して，夫々2p，3p項の解析を行なう方法をとり，この方法を適当に重ねることにより360項までの解析を示している。

すなわち，60項のFourier解析は，次のごとく求められる。

$$(R')\qquad y_0,\quad y_2,\quad y_4\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ y_{58}\ (30項)$$

$$(R'')\qquad y_m,\quad y_{m+2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ y_{59}\ y_1\ y_{m-2}\ (30項)$$

但し，mは奇数

$$\sum_{\rho=0}^{59} y\rho \cos V\rho\alpha = \sum_{\rho=0}^{29} y2\rho \cos 2V\rho\alpha + \sum_{\rho=0}^{29} y2\rho+m \cos(2\rho+m)V\alpha$$

$$= \sum_{\rho=0}^{29} y2\rho \cos 2V\rho\alpha + \cos Vm\alpha \sum_{\rho=0}^{29} y2\rho+m \cos 2V\rho\alpha -$$

$$\sin Vm\alpha \sum_{\rho=0}^{29} y2\rho+m \sin 2V\rho\alpha$$

$$\left(\alpha = \frac{2\pi}{60}\right)$$

$$\sum_{\rho=0}^{59} y\rho \sin V\rho\alpha = \sum_{\rho=0}^{29} y2\rho \sin 2V\rho\alpha + \cos Vm\alpha \sum_{\rho=0}^{29} y2\rho+m$$

$$\sin 2V\rho\alpha + \sin Vm\alpha \sum_{\rho=0}^{29} y2\rho+m \cos 2V\rho\alpha$$

従って，系列R′, R″についてのFourier係数を夫々 Av'，Bv'，Av''，Bv'' としておけば

$$\sum_{\rho=0}^{59} = y\rho \cos V\rho\alpha = Av' + Av''\cos Vm\alpha - Bv''\sin Vm\alpha$$

$$\sum_{\rho=0}^{59} = y\rho \sin V\rho\alpha = Bv' + Bv''\cos Vm\alpha - Av''\sin Vm\alpha$$

この方法を拡張し定式化したものが，″重調和分析〃で，その計算方法はつぎのとおりである。

ある任意の観測点の任意の水深層の水温の時系列 yiをmn項を週期とする時系列

$$y_0,\quad y_1,\quad y_2,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\quad y_{mn-1}\quad として$$

$$\begin{pmatrix} y_0, & y_n, & y_{2n} & \cdots\cdots\cdots\cdots & y_{(m-1)n} \\ y_m, & y_{n+m}, & y_{2n+m} & \cdots\cdots\cdots\cdots & y_{(m-1)n+m} \\ y_{2m}, & y_{n+2m}, & y & \cdots\cdots\cdots\cdots & y_{(m-1)n+2m} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ y_{(n-1)m}, & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & y_{(m-1)n+(n-1)m} \end{pmatrix}$$

と並べる。

その一般項は

$$y_{kn+jm}\left\{\begin{array}{l} k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ m-1 \\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ n-1 \end{array}\right.$$

であらわされる。

(i) まず，(1)の第j行のFourier 係数を求める。

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_j(p)=\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+jm}\cos\left(p,\ k,\ \frac{2\pi}{m}\right) \\ \beta_j(p)=\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+jm}\sin\left(p,\ k,\ \frac{2\pi}{m}\right) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ n-1$

$p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ \frac{m}{2}$ (m，偶数)

$,\ \frac{m-1}{2}$ (m，奇数)

(ii) 次にPをVと書き換えて，$V=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ \frac{mn}{2}$ (m，n共に奇数の場合は $\frac{mn-1}{2}$)について，形式的に拡張すると，

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_j(V)=\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+jm}\cos\left(V,\ k,\ \frac{2\pi}{m}\right) \\ \beta_j(V)=\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+jm}\sin\left(V,\ k,\ \frac{2\pi}{m}\right) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

は，それぞれVについてmを周期とする周期函数である。

(iii) 今y_0，y_1，y_2，$\cdots\cdots\cdots\cdots$，y_{mn-1}なる全系列mn項のFourier 系数をP(V)，Q(V)とすると，

$$\frac{mn}{2}P(V)=\sum_{\rho=0}^{mn-1} y_\rho\cos V\rho\frac{2\pi}{mn}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn}\cos Vkn\frac{2\pi}{mn}+\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+m}\cos V(kn+m)\frac{2\pi}{mn}$$

$$+\cdots\cdots+\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+jm}\cos V(kn+jm)\frac{2\pi}{mn}+\cdots\cdots+\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+(n-1)m}\cos\left\{kn+(n-1)m\right\}\frac{2\pi}{mn}+\cdots\cdots+\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn}\cos V,\ k\frac{2\pi}{m}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+m}\left(\cos V,\ k\frac{2\pi}{m}\cos V\frac{2\pi}{n}-\sin V,\ k\frac{2\pi}{m}\sin V\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+jm}\left(\cos V,\ k\frac{2\pi}{m}\cos Vj\frac{2\pi}{n}-\sin Vk\frac{2\pi}{m}\sin Vj\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+(n-1)m}\left\{\cos Vk\frac{2\pi}{m}\cos V(n-1)\frac{2\pi}{n}-\sin Vk\frac{2\pi}{m}\sin V(n-0)\frac{2\pi}{n}\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+jm}\cos Vk\frac{2\pi}{m}\cos Vj\frac{2\pi}{n}-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} y_{kn+jm}\sin Vk\frac{2\pi}{m}\sin Vj\frac{2\pi}{n}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j(V)\cos Vj\frac{2\pi}{n}-\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j(V)\sin Vj\frac{2\pi}{n}$$

$$V: 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \frac{mn}{2}\ (m\text{又は}n:\text{偶数})$$
$$\frac{mn-1}{2}\ (m,\ n:\text{共に奇数})$$

同称にして

$$\frac{mn}{2}\ Q(V)=\sum_{j=0}^{n-1}\beta j(V)\cos Vj\frac{2\pi}{n}+\sum_{j=0}^{n-1}\alpha j(V)\sin Vj\frac{2\pi}{n}$$
$$V: 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \frac{mn}{2}-1\ (m\text{又は}n:\text{偶数})$$
$$\frac{mn-1}{2}\ (mn:\text{共に奇数})$$

結　　　果

上記の材料および方法にもとづき120項重調和分析により，1968年8月，9月，10月の予測値の計算の結果は表1のとおりである。

表1

観測点＼月		8	9	10	観測点＼月		8	9	10
2	平均	21.36	22.48	20.65	10	平均	20.63	22.20	20.99
	実測	18.81	21.91	21.20		実測	17.58	21.47	21.10
	予報	17.11	14.42	10.04		予報	18.79	17.30	14.34
	偏差					偏差			
3	平均	20.27	21.11	20.22	11	平均	19.22	20.61	20.05
	実測	18.95	20.71	21.20		実測	17.30	20.85	21.40
	予報	19.64	13.69	7.19		予報	12.41	17.97	14.06
	偏差					偏差			
4	平均	19.87	20.80	20.42	12	平均	19.60	20.43	19.59
	実測	18.35	23.48	22.0		実測	17.73	20.56	20.00
	予報	20.85	17,07	15.00		予報	19.55	15.51	20.44
	偏差					偏差			
5	平均	19.60	20.38	20.42	13	平均	18.21	18.57	19.30
	実測	18.80	22.93	21.90		実測	16.82	21.01	21.00
	予報	18.83	15.98	17.46		予報	17.62	12.76	15.04
	偏差					偏差			
6	平均	21.78	23.35	21.19	14	平均	15.95	18.56	18.86
	実測	18.12	20.55	20.70		実測	16.33	18.30	20.4
	予報	25.14	16.59	16.22		予報	13.35	14.14	16.57
	偏差					偏差			

考　　　　　察

i ）この予報は，数値予報を目的として試みたものでその点では８月はともかく９月，１０月は数値予報としては価値があまりないと思われる。原因は検算が充分でなかった事以外に手法上に問題点はなかった。

ii) 結果からみて変動傾向は同様で，この指針としての利用価値はある。

iii ）この予報を試みたのは，はじめに述べたように長周期の変動をくり入れることにより，より正確な数値予報が出来ると考えたが，得られた結果は最小自乗法利用による２４周期の周期分析法による数値予報により悪い結果でありこの原因については判明していない。

結　　　　　論

数値予報を実施するには，相当量の計算があるので今後はコンピューターを利用する方法に進むが，そのためにはこの方法がよいので今後資料を蓄積して再検討する必要がある。